Resolution und die Ganzzahligkeit von SAT-Polytopen

Thomas Friedrich
26. Mai 1997

Seminar über Optimierungsalgorithmen
Universität zu Köln

1 Einleitung

Das SAT-Problem besteht darin, ob eine Menge von Klauseln gleichzeitig erfüllt werden kann. Häufig interessiert man sich aber nicht nur für die Existenz einer Lösung, sondern will über alle zulässigen Lösungen optimieren. Hierfür ist es interessant, ob das zugehörige Polytop ganzzahlig ist, weil dann mit Linearer Programmierung eine optimale Ecklösung des Polytops gefunden werden kann, die ja dann auch noch zulässig für das SAT-Problem ist.

Das Hauptergebnis wird sein, daß ein SAT-Polytop genau dann ganzzahlig ist, wenn es alle maximalen Set-Cover-Teilproblem-Polytope sind.
Die Ganzzahligkeit von Set-Cover-Polytopen ist einfacher zu bestimmen, z. B. über balancierte Matrizen, für deren Nachweis es einen in polynomieller Zeit arbeitenden Algorithmus gibt; für SAT ist hingegen kein solcher bekannt.

Außerdem wird Resolution vorgestellt, eine Methode, die auch beim automatischen Beweisen, einem Teilgebiet der Künstlichen Intelligenz, eingesetzt wird.

2 Logik-Grundlagen

2.1 Das SAT-Problem

Definition: (logische Variable, Literal, Klausel, Erfüllbarkeit, Leerklausel)
Eine *logische Variable* ist eine Variable, die nur die Werte wahr und falsch annehmen kann.
Ein *Literal* ist entweder eine logische Variable oder ihre Negation.
Eine *Klausel* ist eine Disjunktion (ODER-Verknüpfung) von Literalen, in der keine Variable mehr als einmal vorkommt.
Eine Menge S von Klauseln heißt *erfüllbar*, wenn es eine Belegung der Variablen mit wahr oder falsch gibt, so daß jede Klausel aus S wahr wird.
Die *Leerklausel* enthält keinerlei Literale und ist daher nicht erfüllbar, also stets falsch.

Beispiele:

Logische Variablen:	$x_1, \quad x_2, \quad x_3$
Literale:	$x_1, \quad \neg x_1, \quad x_2, \quad \neg x_2$
kein Literal:	$\neg\neg x_1$
Klauseln:	$x_1, \quad x_1 \vee x_2, \quad \neg x_1 \vee x_2, \quad x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee x_4$
keine Klausel:	$x_1 \vee \neg x_1 \vee x_2$
Leerklausel:	$\Box$

Definition: (Absorbierung, Implikation, Primimplikant)
Eine Menge S von Klauseln *impliziert* (logisch) eine Klausel C, wenn jede Belegung, die alle Klauseln in S erfüllt, auch C wahr macht.
Eine Klausel C *absorbiert* eine andere Klausel D, wenn alle Literale aus C auch in D sind.
Ein *Primimplikant* einer Menge S von Klauseln ist eine Klausel, die von S impliziert und von keiner anderen Klausel von S absorbiert wird.

Bemerkung:
C impliziert $D \iff C$ absorbiert D.

Definition: (SAT, KNF, MAXSAT, k-SAT)
Das *Erfüllbarkeitsproblem* (satisfiability problem, SAT) der Aussagenlogik besteht darin, zu entscheiden, ob es eine Belegung der Variablen gibt, so daß alle Klauseln in einer gegebenen Menge wahr werden, ob also die Konjunktion (UND-Verknüpfung) der Klauseln erfüllbar ist. Die Schreibweise als Konjunktion von Disjunktionen heißt *Konjunktive Normalform* (KNF, auch: conjunctive normal form, CNF). Das SAT-Problem mit höchstens k Literalen in jeder Klausel heißt *k-SAT*. Beim *maximum satisfiability problem* (MAXSAT) versucht man, bei gegebener positiver Bewertung jeder Klausel wenigstens eine Teilmenge so zu erfüllen, daß die Summe der Werte der erfüllten Klauseln einen möglichst großen Wert ergibt.

Bemerkungen:

(i) SAT und MAXSAT sind i. a. NP-vollständig. (Satz von Cook, 1971)

(ii) Für $k \geq 3$ ist auch k-SAT NP-vollständig.

2.2 Resolution

Definition: (Resolution, Resolvent, Elternklauseln)
Wenn bei zwei Klauseln C und D exakt ein Literal in der einen Klausel positiv (x_j) und in der anderen negativ ($\neg x_j$) vorkommt, entsteht der *Resolvent* von C und D durch Disjunktion aller Literale aus C und D mit Ausnahme von x_j und $\neg x_j$. Das Anwenden dieser Regel heißt *Resolution*, man *resolviert* C und D *nach* x_j. C und D nennt man dabei die *Elternklauseln*.

Bemerkung:
Für zwei resolvierbare Klauseln C_1 und C_2 mit Resolvent D gilt:
$\{C_1, C_2\}$ impliziert D.

Beispiel:

(1) $x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4$

(2) $x_1 \vee x_3 \vee \neg x_4$

(3) $x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4$

(1) und (2) lassen sich nach x_4 resolvieren, und der Resolvent ist:

(4) $x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$.

(1) und (3) können nicht resolviert werden, weil es kein Literal gibt, das in der einen Klausel positiv und in der anderen negativ vorkommt.
(2) und (3) können nicht resolviert werden, weil mit x_3 und x_4 gleich zwei Literale in der einen Klausel positiv und in der anderen negativ vorkommen.

2.3 Der Algorithmus von Quine

Der folgende Resolutions-Algorithmus von Quine erzeugt alle Primimplikanten einer Klauselmenge S. Ist S nicht erfüllbar, erzeugt der Algorithmus die Leerklausel, die dann einziger Primimplikant ist (weil sie jede andere Klausel absorbiert).

Algorithmus: Resolution
$S' := \{C \in S \mid \nexists D \in S,\ |D| < |C| :\ D \text{ absorbiert } C\}$
while (A, $B \in S'$ Klauseln mit Resolvent C,
und $\nexists D \in S' :\ D$ absorbiert C)
{
if ($C = \square$) **stop:** „S unerfüllbar, $\square$ einziger Primimplikant."
$S' := S' \setminus \{D \in S' \mid C \text{ absorbiert } D\}$
$S' := S' \cup \{C\}$
}
stop: „S ist erfüllbar; alle Primimplikanten erzeugt."

Der Algorithmus geht dabei wie folgt vor: S' besteht zunächst aus allen Klauseln von S, die nicht von kürzeren Klauseln absorbiert werden. Dann werden zwei Klauseln aus S' resolviert zur Klausel C. Gibt es in S' keine zwei solchen Klauseln, besteht S' bereits aus allen Primimplikanten von S. Ist C die Leerklausel, ist S unerfüllbar. Anschließend werden alle Klauseln aus S' entfernt, die C absorbiert, und C in S' aufgenommen.
Die worst-case-Laufzeit dieses Algorithmus ist exponentiell.

3 Polytop-Grundlagen

3.1 SAT als Polytop

Definition: (Polyeder, Polytop, ganzzahliges Polytop, Ecke)
Eine Teilmenge $P \subseteq I\!R^n$ heißt *Polyeder*, wenn es ein $m \in I\!N$, eine Matrix $A \in I\!R^{m \times n}$ und $a \in I\!R^m$ gibt mit $P = \{x \in I\!R^n \mid Ax \geq a\}$.
Ein beschränktes Polyeder heißt *Polytop*.
Die eindeutige Lösung eines aus n linear unabhängigen Zeilen bestehenden Teilsystems $Bx = b$ von $Ax \geq a$ heißt *Ecke* des Polyeders bzw. Polytops.
Ein Polytop heißt *ganzzahlig*, wenn alle seine Ecken ausschließlich ganzzahlige Koordinaten haben.

Definition: (Lineares Optimierungsproblem, LP)
Für gegebene $A \in I\!R^{m \times n},\ b \in I\!R^m,\ c \in I\!R^n$ ist (z. B.) die Aufgabe

$$\text{(LP)} \qquad \begin{array}{ll} \text{minimiere } c^{\mathrm{T}}x & \\ \text{so daß} & Ax \geq b \\ \text{und} & x \geq 0 \end{array}$$

ein *lineares Optimierungsproblem* oder *lineares Programm* (LP).

Bemerkungen:

(i) Ein Polytop ist die konvexe Hülle seiner Ecken.

(ii) Für ein lineares Optimierungsproblem über einem Polytop gilt:
Es gibt eine Optimallösung $\iff$ es gibt eine optimale Ecklösung.

Identifiziert man bei SAT die logischen Variablen als 0-1-Variablen, wobei „wahr" dem Wert 1 und „falsch" dem Wert 0 entspricht, und ersetzt man ferner Negationen $\neg x_j$ durch $(1-x_j)$, so kann man die einzelnen Klauseln als Ungleichungen schreiben, wobei die 0-1-Lösungen der Ungleichungen genau den Erfüllbarkeitsbelegungen von SAT entsprechen.
So wird z. B. aus

$$x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4$$

dann

$$x_1 + (1 - x_2) + x_4 \geq 1.$$

Dabei ist „≥ 1" so zu verstehen, daß mindestens ein Literal 1 wird, also die entsprechende Klausel erfüllt ist.

Durch Umformen erhält man schließlich:

$$x_1 - x_2 + x_4 \geq 0.$$

Auf diese Art wird aus obigen Beispielklauseln (1)-(3):

$$\begin{array}{ll} (5) & x_1 - x_2 \qquad + x_4 \geq 0 \\ (6) & x_1 \qquad + x_3 - x_4 \geq 0 \\ (7) & x_1 \qquad - x_3 + x_4 \geq 0. \end{array}$$

Also kann man ein SAT-Problem in ein System $Ax \geq a$ umschreiben und dieses als Beschreibung für ein Polytop $P = \{x \in I\!R^n \mid Ax \geq a, 0 \leq x \leq 1\}$ betrachten. Dieses Polytop ist genau dann ganzzahlig, wenn es die konvexe Hülle der zulässigen Lösungen des SAT-Problems ist.

3.2 Maximale Set-Cover-Teilprobleme

Definition: (SC)
Für eine 0-1-Matrix B definiert das System $Bx \geq 1,\ x \in \{0,1\}^n$ ein *Mengenüberdeckungs-Problem* (set cover problem, SC).

Das set cover problem besteht im wesentlichen darin, einige wenige Elemente einer Obermenge so auszuwählen, daß für eine gegebene Familie von Teilmengen aus jeder mindestens ein gewähltes Element stammt.
Die Matrix B beschreibt dabei zeilenweise die Charakteristiken der einzelnen Teilmengen.

Definition: (Monotonie, Balance)
Eine Matrix A heißt *monoton*, wenn in keiner Spalte sowohl positive als auch negative Elemente vorkommen.
A heißt *balanciert*, wenn für jede Teilmatrix, die in jeder Zeile und jeder Spalte genau zwei Nichtnull-Einträge hat, gilt, daß sich alle ihre Elemente zu 0 modulo 4 aufsummieren.

Bemerkungen:
Ist die Matrix B im SC-Problem $Bx \geq 1,\ x \in \{0,1\}^n$ balanciert, dann ist das Polytop $P = \{x \in I\!R^n \mid Bx \geq 1,\ 0 \leq x \leq 1\}$ ganzzahlig.
Dasselbe gilt für die Matrix A und das entsprechende Polytop im SAT-Problem.

Die Balance der Matrix A ist lediglich hinreichend für die Ganzzahligkeit des SAT-Polytops, jedoch nicht notwendig.

Beispiel:
Betrachte das (in Ungleichungen geschriebene) SAT-Problem

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$$

$$x_1 - x_2 - x_3 \geq -1.$$

Die zugehörige Matrix ist nicht balanciert, weil die Summe der Einträge der ersten beiden Spalten 2 beträgt. Trotzdem definieren die beiden Ungleichungen (zusammengenommen mit $0 \leq x \leq 1$) ein ganzzahliges Polytop.

Definition: (maximales SC-Teilproblem)
$Bx \geq b$ ist ein *Set-Cover-Teilproblem* von $Ax \geq a$, falls (B, b) eine Teilmenge der Zeilen von (A, a) darstellt, und B eine monotone Matrix ist.
Ein Set-Cover-Teilproblem $Bx \geq b$ heißt *maximal*, wenn durch Hinzunahme einer beliebigen weiteren Zeile aus $Ax \geq a$ die Monotonie von B zerstört wird.

In Set-Cover-Teilproblemen kommt also jede Variable entweder nur positiv oder nur negativ vor. Durch Ersetzung der negativen Literale durch Variablen kann man sich o. B. d. A. auf nur positive Literale beschränken.
Da das SC-Teilproblem aus einer Teilmenge der SAT-Klauseln besteht, bedeutet hier eine Überdeckung, daß aus jeder Klausel mindestens ein Literal gesetzt ist, also wahr wird.

Die maximalen SC-Teilprobleme des SAT-Problems $Ax \geq a$ müssen nicht unbedingt disjunkt sein. Man erhält sie durch Erzeugung eines Graphen, in dem die Klauseln die Knoten sind, und eine Kante genau dann zwei Knoten verbindet, wenn in den entsprechenden Klauseln mindestens eine Variable mit unterschiedlichem Signum vorkommt.
Die maximalen SC-Teilprobleme sind dann genau die maximalen independent sets, also maximale Knotenmengen, deren induzierte Teilgraphen keine Kanten enthalten.

Bemerkung:
Enthält die SAT-Instanz die Leerklausel $\Box$, so ist diese auch in allen SC-Teilproblemen enthalten. Sowohl das SAT-Polytop als auch alle SC-Polytope sind dann leer. Dieser Fall ist also uninteressant.

Nach diesen Vorbereitungen folgt nun der zentrale Satz dieses Vortrages.

4 Über die Ganzzahligkeit von SAT-Polytopen

4.1 Der Satz

Hauptsatz:
Sei $Ax \geq a$ die Repräsentation einer SAT-Instanz, die alle ihre Primimplikanten enthält (z. B. durch Resolution gewonnen). Dann beschreiben die Ungleichungen

$$\begin{aligned} Ax &\geq a \\ 0 \leq x &\leq 1 \end{aligned}$$

genau dann ein ganzzahliges Polytop P, wenn für *jedes* maximale Set-Cover-Teilproblem $A'x \geq a'$ von $Ax \geq a$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} A'x &\geq a' \\ 0 \leq x &\leq 1 \end{aligned}$$

ein ganzzahliges Polytop beschreiben.

4.2 Der Beweis

4.2.1 „⇒“

Für eine SAT-Instanz $Ax \geq a$, die alle ihre Primimplikanten enthält, definiere $Ax \geq a,\ 0 \leq x \leq 1$ ein ganzzahliges Polytop P.

zu zeigen: auch die Polytope aller maximalen SC-Teilprobleme sind ganzzahlig.

Annahme: Es gibt ein SC-Teilproblem $A'x \geq a'$ von $Ax \geq a$, dessen Polytop P' eine nicht-ganzzahlige Ecke x^* besitzt, und $Ax \geq a$ sei ein Gegenbeispiel, das minimal in der Anzahl der Variablen ist.

Da A' monoton ist, kann man o. B. d. A. annehmen, daß alle Einträge nicht-negativ sind (evtl. Spalten von A mit Negationen substituieren). Wegen der Maximalität enthält A' *alle* nicht-negativen Zeilen von A. x^* ist als Ecke von P' die eindeutige Lösung eines Gleichungssystems $Bx = b$, bestehend aus n linear unabhängigen Gleichungen aus $A'x = a'$, $x = 0$, $x = 1$.

Behauptung: Wegen der Minimalität des Gegenbeispieles stammen alle Gleichungen von $Bx = b$ aus $A'x = a'$.

Beweis hiervon: Angenommen, dies sei nicht der Fall, und $Bx = b$ enthalte noch Gleichungen der Form $x = 0$ bzw. $x = 1$; o. B. d. A. sei eine solche Gleichung $x_1 = \delta$, wobei $\delta = 0$ oder 1.

Betrachte nun das Problem $\bar{A}\bar{x} \geq \bar{a}$, das aus $Ax \geq a$ dadurch entsteht, daß jedes Auftreten von x_1 durch δ ersetzt und entsprechend aufgelöst wird. Analog seien $\bar{A}'\bar{x} \geq \bar{a}'$ und $\bar{B}\bar{x} = \bar{b}$ erklärt. Dann definiert $\bar{A}\bar{x} \geq \bar{a}$ ein ganzzahliges Polytop $\bar{P}$, denn wenn $\bar{x}$ nicht-ganzzahlige Ecke von $\bar{P}$ wäre, dann wäre $(\delta, \bar{x})$ nicht-ganzzahlige Ecke von P; Widerspruch zur Ganzzahligkeit von P.
Also ist $\bar{x}^* = (x_2^*, \ldots, x_x^*)$ eindeutige Lösung von $\bar{B}\bar{x} = \bar{b}$ und deshalb nicht-ganzzahlige Ecke von $\bar{A}'\bar{x} \geq \bar{a}'$.
Damit wäre dies ein Gegenbeispiel mit einer Variablen weniger als $Ax \geq a$; Widerspruch zur Minimalität des Gegenbeispieles.
Damit ist die Behauptung bewiesen.

Um jetzt zu zeigen, daß x^* Ecke von P ist, reicht es, zu zeigen, daß $x^* \in P$, da $P \subseteq P'$. Hierfür genügt es, zu zeigen, daß x^* alle Primimplikanten erfüllt, da jede Ungleichung aus $Ax \geq a$ von irgendeinem Primimplikanten absorbiert wird.

Annahme: Es gibt einen Primimplikanten $cx \geq \gamma$, der von x^* nicht erfüllt wird.
Dann gilt $c_t = -1$ für mindestens ein t, da $cx \geq \gamma$ bei $c \geq 0$ bereits zu $A'x \geq a'$ gehört und somit von x^* erfüllt wird.

1. Fall: Es gibt ein $c_t = -1$, so daß in $Bx = b$ keine Gleichung eine Klausel repräsentiert, die mit $cx \geq \gamma$ nach x_t resolviert werden kann.
Wegen der Regularität von B gibt es aber mindestens eine Gleichung in $Bx = b$, die x_t enthält (sonst Nullspalte in B). Da $Bx = b$ nach obiger Behauptung Teilsystem von $A'x = a'$ ist, repräsentiert diese Gleichung eine Klausel, die nicht mit $cx \geq \gamma$ nach x_t resolviert werden kann.
Diese Gleichung und die Klausel $cx \geq \gamma$ können geschrieben werden als

$$x_t \quad + \quad x_{t'} \qquad\qquad + \sum_{j \notin \{t,t'\}} b_j x_j \;= 1 \tag{1}$$

$$(1 - x_t) + (1 - x_{t'}) \qquad + \sum_{j \notin \{t,t'\}} f_j(x_j) \geq 1, \tag{2}$$

für ein $t' \neq t$, wobei $b_j \geq 0$ für alle j, und $f_j(x_j)$ ist x_j, $1 - x_j$ oder 0.

Da x^* aber Gleichung (1) erfüllt, gilt $x_t^* + x_{t'}^* \leq 1$, und damit $(1 - x_t^*) + (1 - x_{t'}^*) \geq 1$, also erfüllt x^* auch (2); dies entsprach der Klausel $cx \geq \gamma$, die von x^* nicht erfüllt wurde. Widerspruch !

2. Fall: Für jedes $c_t = -1$ kann $cx \geq \gamma$ mit einer durch eine Gleichung in $Bx = b$ repräsentierten Klausel nach x_t resolviert werden.
Die Klausel $cx \geq \gamma$ kann geschrieben werden als

$$\sum_{j=1}^{u}(1 - x_j) + \sum_{j=u+1}^{n} c_j x_j \geq 1, \tag{3}$$

wobei $c_j \geq 0$ für $j = u+1, \ldots, n$. Die Gleichungen, die die Klauseln repräsentieren, mit denen $cx \geq \gamma$ nach $x_1, \ldots, x_u$ resolviert werden kann, lassen sich schreiben als

$$x_t + \sum_{j=u+1}^{n} b_{tj} x_j = 1 \tag{4}$$

für $t = 1, \ldots, u$, wobei alle $b_{tj} \geq 0$. Resolviert man jetzt die der Ungleichung (3) entsprechende Klausel nacheinander mit den entsprechenden der Gleichungen (4), so erhält man die Ungleichung

$$\sum_{j=u+1}^{n} d_j x_j \geq 1, \tag{5}$$

wobei $d_j = \max\left\{c_j, \max_{t\in\{1,\ldots,u\}} b_{tj}\right\}$.
Gleichung (4) wird von x^* erfüllt; löst man (4) für jedes t nach x_t auf und setzt dies in die linke Seite von (3) ein, ergibt sich

$$\sum_{j=u+1}^{n} \left(c_j + \sum_{t=1}^{u} b_{tj}\right) x_j^*. \tag{6}$$

Ungleichung (5) muß aber von einem Primimplikanten aus $Ax \geq a$ absorbiert werden; weil sie jedoch nur positive Literale enthält, muß dieser Primimplikant bereits in $A'x \geq a'$ enthalten sein und wird demnach von x^* erfüllt. Deshalb erfüllt x^* auch (5). Da jetzt in (5) bereits die Summe über die Maxima der c_j und b_j größer als 1 ist, ist erst recht (6), was die rechte Seite von (3) war, größer als 1. Also erfüllt x^* auch (3), was die von x^* nicht erfüllte Klausel repräsentierte; Widerspruch !

Also ist $x^* \in P$ und damit auch nicht-ganzzahlige Ecke von P; Widerspruch zur Voraussetzung, daß P ganzzahlig ist.

4.2.2 „$\Leftarrow$“

Sei für jedes maximale Set-Cover-Teilproblem $A' \geq a'$ von $Ax \geq a$ das durch $A'x \geq a',\ 0 \leq x \leq 1$ beschriebene Polytop ganzzahlig.

Annahme: Das durch $Ax \geq a,\ 0 \leq x \leq 1$ definierte SAT-Polytop habe eine nicht-ganzzahlige Ecke x^*.

Wir konstruieren jetzt, ausgehend von dem Ecken-definierenden System E von n linear unabhängigen Gleichungen aus $Ax = a,\ x = 0,\ x = 1$, dessen eindeutige Lösung x^* ist, ein *monotones* System M aus n dieser Gleichungen, dessen eindeutige Lösung auch x^* sein soll.
Dies würde bedeuten, daß es ein maximales SC-Teilproblem gibt, dessen Polytop x^* als nicht-ganzzahlige Ecke hätte.

Für jedes j füge die Gleichung $x_j = 1$ zu E hinzu, falls $x_j^* = 1$, und $x_j = 0$, falls $x_j^* = 0$. Da E den Rang n hat und die Gleichungen der Form $x_j = 1$ und $x_j = 0$ linear unabhängig sind, sind letztere auch in einem n Gleichungen umfassenden Teilsystem E' von E enthalten, das immernoch x^* als eindeutige Lösung hat.

Die Gleichungen in E', die Teil des Systems $Ax = a$ sind, seien die *Klausel-Gleichungen*, die anderen die *Schranken-Gleichungen*. Die i-te Klausel-Gleichung habe die Form $\sum_j f_{ij}(x_j) = 1$, wobei jedes $f_{ij}(x_j) = x_j$, $1 - x_j$ oder 0 ist. Außerdem sei x^* gebrochen für $j \in N_1$ und ganzzahlig für $j \in N_2$.

Konstruiere nun M wie folgt: Setze M zunächst gleich E'. Wähle ein beliebiges x_t, das in den Klausel-Gleichungen mit unterschiedlichem Vorzeichen vorkommt, also $f_{it}(x_t) = x_t$ und $f_{i't}(x_t) = 1 - x_t$ für zwei Gleichungen i und i'.

Wir zeigen nun zuerst, daß x_t^* gebrochen sein muß. Wenn die Klauseln zu den Gleichungen i und i' dann resolviert werden können, ist es möglich, bei Beibehaltung der eindeutigen Lösung x^* und ohne Zerstörung bereits bestehender Monotonie, den Vorzeichenkonflikt zu entfernen.

Behauptung: x_t^* ist gebrochen.

Die Koeffizientenmatrix B der Gleichungen aus M hat die Struktur: $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ D_1 & D_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Die linke Hälfte enthält die Spalten aus N_1, die rechte Hälfte die aus N_2.

$(C_1,\, C_2)$ besteht aus den zwei Zeilen i und i'. I enthält die Koeffizienten der Schranken-Gleichungen.

Angenommen, $x_t^* = 1$. Weil x_j^* für alle $j \in N_1$ gebrochen ist und $\sum_{j \in N_1 \cup N_2} f_{ij}(x_j^*) = 1$, muß $f_{ij}(x_j) = 0$ für alle $j \in N_1$ sein. Das bedeutet, daß Zeile i Linearkombination der Zeilen in $(0,\, I)$ ist. Dies widerspricht aber der Regularität von B.
Analog hat $x_t^* = 0$ zur Folge, daß die Zeile i' Linearkombination der Zeilen in $(0,\, I)$ und somit die Nichtsingularität von B verletzt ist.
Damit Behauptung gezeigt.

Behauptung: Die Klauseln i und i' sind resolvierbar.

Angenommen, sie wären nicht resolvierbar. Dann haben die Gleichungen i und i' die Form

$$\begin{aligned} x_t \quad + \quad x_{t'} \qquad\qquad & + \sum_{j \notin \{t,t'\}} f_{ij}(x_j) = 1 \\ (1 - x_t) + (1 - x_{t'}) \qquad\qquad & + \sum_{j \notin \{t,t'\}} f_{i'j}(x_j) = 1, \end{aligned}$$

oder sie haben die Form

$$\begin{aligned} x_t \quad + (1 - x_{t'}) \qquad\qquad & + \sum_{j \notin \{t,t'\}} f_{ij}(x_j) = 1 \\ (1 - x_t) + \quad x_{t'} \qquad\qquad & + \sum_{j \notin \{t,t'\}} f_{i'j}(x_j) = 1. \end{aligned}$$

Im oberen Fall erfüllt x^* beide Gleichungen; ihre Addition und die Tatsache, daß alle $f_{ij}(x^*) \geq 0$, ergibt:

$$\sum_{j \notin \{t,t'\}} f_{ij}(x_j^*) = \sum_{j \notin \{t,t'\}} f_{i'j}(x_j^*) = 0.$$

Nach der ersten Gleichung folgt also $x_t^* + x_{t'}^* = 1$. Da x_t^* gebrochen ist, ist auch $x_{t'}$ gebrochen und $t' \in N_1$. Weil x_j^* gebrochen ist für alle $j \in N_1$, sind f_{ij} und $f_{i'j}$ Nullfunktionen für alle $j \in N_1 \backslash \{t, t'\}$. Daher sind die beiden Zeilen von C_1 Negationen voneinander. Analoges gilt für den unteren Fall: die Addition der beiden Gleichungen ergibt $x_t^* = x_{t'}^*$, also wieder $t' \in N_1$, und f_{ij} sowie $f_{i'j}$ sind Nullfunktionen für alle $j \in N_1 \backslash \{t, t'\}$. Die zwei Zeilen von C_1 sind auch hier Negationen voneinander.

In beiden Fällen hat C_1 also nicht vollen Rang. Nun ist aber

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} C_1 \\ D_1 \end{pmatrix}$$

nur dann nicht Null, wenn C_1 vollen Rang hat. Dies ist ein Widerspruch zur Regularität von B.
Daher sind die beiden Klauseln i und i' resolvierbar.

Die zu den beiden Klauseln gehörenden Klauselgleichungen können also geschrieben werden als

$$\begin{array}{lllll} x_t & + \sum_{j \in J_1} f_{ij}(x_j) & & + \sum_{j \in J_3} f_{ij}(x_j) & = 1 \\ (1 - x_t) & & + \sum_{j \in J_2} f_{i'j}(x_j) & + \sum_{j \in J_3} f_{ij}(x_j) & = 1, \end{array}$$

wobei f_{ij} für jedes $j \in J_3$ nicht die Nullfunktion sei. Der Resolvent

$$\sum_{j \in J_1} f_{ij}(x_j) + \sum_{j \in J_2} f_{i'j}(x_j) + \sum_{j \in J_3} f_{ij}(x_j) \geq 1 \tag{7}$$

wird von einer Klausel i'' aus $Ax \geq a$ absorbiert, weil $Ax \geq a$ nach Voraussetzung alle Primimplikanten enthält.
x^* erfüllt sowohl die beiden Klauselgleichungen i und i' als auch deren Resolventen. Zieht man nun die Summe von i und i' vom Resolventen ab, erhält man

$$\sum_{j \in J_3} f_{ij}(x_j^*) = 0.$$

Dies in die Summe der beiden Klauselgleichungen eingesetzt ergibt, daß x^* die Resolventen-Ungleichung (7) mit Gleichheit erfüllt. Da für $j \in J_3$ gilt: $f_{ij}(x_j^*) = 0$, aber hier kein f_{ij} die Nullfunktion ist, enthält M die Schranken-Gleichung $x_j = 0$ oder $x_j = 1$.

Konstruiere nun ein System von Gleichungen M' aus M wie folgt: ersetze eine der beiden Gleichungen i oder i' durch den als Gleichung geschriebenen Primimplikanten i'', der den Resolventen von i und i' absorbiert, also

$$\sum_{j \in J_1'} f_{ij}(x_j) + \sum_{j \in J_2'} f_{i'j}(x_j) + \sum_{j \in J_3'} f_{ij}(x_j) = 1,$$

wobei $J_k' \subset J_k$ für $k = 1, 2, 3$. Da x^* sowohl die Summe von i und i' (mit Gleichheit) als auch den Primimplikanten i'' erfüllt, erfüllt x^* auch diese letzte Gleichung, da die Mengen J_k' ja höchstens kleiner sind. Also erfüllt x^* alle

Gleichungen aus M'.

Bleibt noch zu zeigen, daß x^* einzige Lösung von M' ist. Weil $f_{ij}(x^*) = 0$ ist für $j \in J_3$, und x^* die letzte Gleichung und (7) mit Gleichheit erfüllt, müssen $f_{ij}(x_j^*) = 0$ für $j \in (J_1 \backslash J_1')$ und $f_{i'j}(x_j^*) = 0$ für $j \in (J_2 \backslash J_2')$ sein. Durch die Schranken-Gleichungen $x_j = 0$ bzw. $x_j = 1$, die ja zu M' gehören, sind $f_{ij}(x_j) = 0$ für $j \in (J_1 \backslash J_1')$ und $f_{i'j}(x_j) = 0$ für $j \in (J_2 \backslash J_2')$.
Also erfüllt jedes x, das die Gleichungen aus M' erfüllt, auch alle Gleichungen von M. Einzige Lösung von M war aber das x^*; also ist x^* auch einzige Lösung von M'.

Wenn jetzt M' das neue M darstellt, ist x^* nach wie vor eindeutige Lösung von M. Da aber die Gleichung i'' (der Primimplikant, der den Resolventen von i und i' absorbiert) x_t nicht mehr enthält, ist ein Vorzeichenkonflikt aus M entfernt.

Durch wiederholte Anwendung dieser Prozedur entsteht so das gewünschte monotone System M.

Dann gibt es auch ein maximales SC-Teilproblem, das die zu M gehörenden Klauseln umfaßt, und dessen Polytop das nicht-ganzzahlige x^* als Ecke enthält. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.
Also muß auch das SAT-Polytop ganzzahlig sein.

q. e. d.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Logik-Grundlagen **1**

2.1 Das SAT-Problem 1

2.2 Resolution 2

2.3 Der Algorithmus von Quine 3

3 Polytop-Grundlagen **4**

3.1 SAT als Polytop 4

3.2 Maximale Set-Cover-Teilprobleme 5

4 Über die Ganzzahligkeit von SAT-Polytopen **7**

4.1 Der Satz 7

4.2 Der Beweis 7

4.2.1 „$\Rightarrow$“ 7

4.2.2 „$\Leftarrow$“ 10