Große Abweichungen und das Pusher-Chooser-Game

Thomas Friedrich
23. Juni 1998

Seminar über Graphentheorie
Universität zu Köln

1 Große Abweichungen

Lemma 1:
Seien $X_1, \ldots, X_n$ paarweise unabhängige Zufallsvariablen mit

$$\text{prob}[X_i = 1] = \text{prob}[X_i = -1] = \frac{1}{2} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

und $S_n := X_1 + \ldots + X_n$. Dann gilt für jedes $\lambda > 0$:

$$\text{prob}[S_n > \lambda] < \exp\left(\frac{-\lambda^2}{2n}\right).$$

Beweis:
Da $\text{E}[X_i] = \text{prob}[X_i = 1] \cdot 1 + \text{prob}[X_i = -1] \cdot (-1) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1)$ und $\exp(\alpha t)$ für alle $\alpha > 0$ streng monoton steigt, ist

$$\begin{aligned}
\text{E}[\exp(\alpha X_i)] &= \frac{1}{2} \cdot \exp(\alpha \cdot 1) + \frac{1}{2} \cdot \exp(\alpha \cdot (-1)) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (\exp(\alpha) + \exp(-\alpha)) \\
&= \cosh(\alpha).
\end{aligned}$$

Durch Potenzreihenentwicklung erhält man

$$\cosh(\alpha) \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} \; < \; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{2^n \cdot n!} \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)^n}{n!} \; = \; \exp\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)$$

und somit

$$\text{E}[\exp(\alpha X_i)] = \cosh(\alpha) < \exp\left(\frac{\alpha^2}{2}\right). \tag{1}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
\text{E}[\exp(\alpha S_n)] &\underset{\text{Def. } S_n}{=} \text{E}\left[\exp\left(\alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right] \underset{\text{Add. Th.}}{=} \text{E}\left[\prod_{i=1}^{n} \exp(\alpha X_i)\right] \\
&\underset{X_i \text{ unabh.}}{=} \prod_{i=1}^{n} \text{E}[\exp(\alpha X_i)] \underset{(1)}{<} \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) \qquad (2) \\
&= \exp\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)^n = \exp\left(\frac{n \cdot \alpha^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}
\text{prob}[S_n > \lambda] = \text{prob}[\exp(\alpha S_n) > \exp(\alpha\lambda)] &\underset{\text{Tschernoff}}{\leq} \text{E}[\exp(\alpha S_n)] \cdot \exp(-\alpha\lambda) \\
&\underset{(2)}{<} \exp\left(\frac{n \cdot \alpha^2}{2}\right) \cdot \exp(-\alpha\lambda) \underset{\text{Add. Th.}}{=} \exp\left(\frac{n \cdot \alpha^2}{2} - \alpha\lambda\right).
\end{aligned}$$

Wählt man $\alpha := \frac{\lambda}{n} > 0$, ergibt sich

$$\text{prob}[S_n > \lambda] < \exp\left(\frac{-\lambda^2}{2n}\right).$$

q. e. d.

Bemerkung:
Lemma 1 läßt sich wie folgt verallgemeinern:
Seien $Y_1, \ldots, Y_n$ paarweise verschiedene Zufallsvariablen mit

$$\text{prob}[Y_i = 1] = p_i, \quad \text{prob}[Y_i = -1] = 1 - p_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$X_i := Y_i - p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, $p := \frac{p_1 + \ldots + p_n}{n}$ und $X := X_1 + \ldots + X_n$.
Dann gelten

(i) $\text{prob}[X > a] < \exp\left(\frac{-2a^2}{n}\right)$

(ii) $\text{prob}[X < -a] < \exp\left(\frac{-a^2}{2pn}\right)$

(iii) $\text{prob}[X > a] < \exp\left(\frac{-a^2}{2pn} + \frac{a^3}{2 \cdot (pn)^3}\right)$.

(Dies sei hier ohne Beweis angegeben.)

Definition:
Sei $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ eine beliebige Familie endlicher Mengen über der Grundmenge Ω. Dann heißt $\chi : \Omega \longrightarrow \{+1, -1\}$ eine *Zweifärbung* von Ω.
Sei $\chi(A) := \sum\limits_{a \in A} \chi(a)$ für $A \in \mathcal{A}$. Definiere dann die *Diskrepanz* wie folgt:

$$\text{disc}(\chi) := \max_{A \in \mathcal{A}} |\chi(A)|$$
$$\text{disc}(\mathcal{A}) := \min_{\chi} \ \text{disc}(\chi).$$

Dabei ist $\text{disc}(\mathcal{A}) \leq k$ gleichbedeutend damit, daß es eine Zweifärbung χ von Ω gibt mit $|\chi(A)| \leq k$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Satz 2:
Wenn $|\mathcal{A}| = |\Omega| = n$ gilt, dann ist

$$\text{disc}(\mathcal{A}) \leq \sqrt{2n \ \ln(2n)}.$$

Beweis:
Wenn χ zufällig gewählt wird und $r := |A|$ ist, genügt $\chi(A)$ der Verteilung

S_r (wie in Lemma 1 definiert). Da für alle $A \subseteq \Omega \quad |A| \leq |\Omega| = n$ gilt, ist nach Lemma 1

$$\text{prob}[|\chi(A)| > \lambda] < 2 \cdot \exp\left(\frac{-\lambda^2}{2n}\right).$$

Deswegen ist

$$\text{prob}[\text{disc}(\chi) > \lambda] < \sum_{A \in \mathcal{A}} \text{prob}[|\chi(A)| > \lambda] < 2n \cdot \exp\left(\frac{-\lambda^2}{2n}\right) \stackrel{!}{=} 1$$

mit Wahl von $\lambda := \sqrt{2n \, \ln(2n)}$. Also ist $\text{prob}[\text{disc}(\chi) \leq \lambda] > 0$ und damit existiert ein χ mit $\text{disc}(\chi) \leq \lambda$. **q. e. d.**

Korollar: (zu Satz 2)
Seien $u_j \in \mathbb{R}^n$ mit $||u_j||_\infty \leq 1$ $(j = 1, \ldots, n)$. Dann gibt es $\varepsilon_j \in \{-1, +1\}$ derart, daß für $u := \varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_n u_n$ gilt: $||u||_\infty \leq \sqrt{2n \, \ln(2n)}$.

Beweis:
Sei $\mathcal{A} \subseteq \Omega$; bezeichne die Elemente von Ω mit $1, \ldots, n$ und die Mengen mit $A_1, \ldots, A_n$. Die Matrix A enthalte zeilenweise die charakteristischen Vektoren der A_i. Betrachte die Spalten von A jetzt als die u_j.
Eine Zweifärbung $\chi : \Omega \longrightarrow \{+1, -1\}$ von Ω bestimmt jetzt die Belegung der $\varepsilon_j = \chi(j)$ und umgekehrt. Analog entspricht $\text{disc}(A_i)$ der i-ten Koordinate und $\text{disc}(\chi)$ der ∞-Norm von u.
Also läßt sich eine leichte Modifikation (wegen $a_{ij} \in [-1, +1]$) des Beweises von Satz 2 anwenden. **q. e. d.**

Bemerkung:
Jetzt haben wir einen probabilistischen Beweis dafür, daß solche ε_j existieren. Wie aber können wir sie bestimmen ?

Algorithmus I:
Probiere sämtliche 2^n Möglichkeiten, die ε_j zu setzen, durch.

Bemerkung:
Natürlich hat dieser Algorithmus eine nicht akzeptable exponentielle Laufzeit. Es bietet sich auch eine randomisierte Methode an.

Algorithmus II:
Setze die ε_j zufällig gleichverteilt auf -1 oder +1.

Bemerkung:
Randomisierte Algorithmen produzieren i. a. nur im *Erwartungswert* gute Lösungen. Wir wollen aber eine garantierte, deterministische Lösung haben. Deshalb werden wir im folgenden Algorithmus II mit einer Standardtechnik derandomisieren. Diese ist auch auf andere Algorithmen anwendbar, die mit „Münzwurf" arbeiten.

Alle n-Tupel $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i \in \{-1, +1\}$ seien gleichwahrscheinlich. Ferner seien $A_1, \ldots, A_m$ schlechte Eigenschaften mit $\sum\limits_{i=1}^{m} A_i < 1$. (In unserem Fall ist $n = m$, und A_i heißt: $|u^{(i)}| \geq \lambda$, wobei $u^{(i)}$ die i-te Komponente von u sei. Gesucht sind jetzt $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, so daß $\bigwedge\limits_{i=1}^{m} \overline{A_i}$ erfüllt ist.

Wir bestimmen die ε_j sukzessive. Seien $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{j-1}$ bereits gesetzt. Sei

$$W_i := \text{prob}[A_i \,|\, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{j-1}].$$

Dies ist die Wahrscheinlichkeit, daß A_i auftritt, wenn $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{j-1}$ *so* gesetzt und die restlichen ε_k noch zufällig gewählt werden.

Durch Wahl von ε_j kann sich W_i nun auf zwei Arten ändern. Setze dazu

$$\begin{aligned} W_i^+ &:= \text{prob}[A_i \,|\, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{j-1};\, \varepsilon_j := +1] \\ W_i^- &:= \text{prob}[A_i \,|\, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{j-1};\, \varepsilon_j := -1]. \end{aligned}$$

Es gilt $W_i = \frac{1}{2} \cdot (W_i^+ + W_i^-)$. Seien jetzt

$$W^{\text{alt}} := \sum_{i=1}^{m} W_i, \quad W^{\text{alt}+} := \sum_{i=1}^{m} W_i^+, \quad W^{\text{alt}-} := \sum_{i=1}^{m} W_i^-.$$

Es gilt $W^{\text{alt}} = \frac{1}{2} \cdot (W^{\text{alt}+} + W^{\text{alt}-})$.

Algorithmus III:
Wenn $W^{\text{alt}-} \leq W^{\text{alt}+}$, setze $\varepsilon_j := -1$, sonst $\varepsilon_j := +1$.

Lemma 3:
Algorithmus III produziert eine Lösung mit $||u||_\infty \leq \sqrt{2n\,\ln(2n)}$.

Beweis:
Nach obiger Bemerkung reicht zu zeigen, daß nach Wahl der $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ gemäß Algorithmus III $\bigwedge\limits_{i=1}^{m} \overline{A_i}$ erfüllt ist.

Nach der Wahl von ε_j sei

$$W^{\text{neu}} := \sum_{i=1}^{m} \text{prob}[A_i \,|\, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{j-1}, \varepsilon_j]$$

und daher

$$W^{\text{neu}} = \min\{W^{\text{alt}+}, W^{\text{alt}-}\} \leq \frac{1}{2} \cdot (W^{\text{alt}+} + W^{\text{alt}-}) = W^{\text{alt}},$$

d. h. die W-Werte fallen monoton.

Wenn W^{initial} bzw. W^{final} den W-Wert vor der Wahl von ε_1 bzw. nach der Wahl von ε_n bezeichnet, gilt also $W^{\text{final}} \leq W^{\text{initial}}$. Da nach Voraussetzung $W^{\text{initial}} = \sum_{i=1}^{m} \text{prob}[A_i] < 1$, ist $W^{\text{final}} < 1$. Da zu diesem Zeitpunkt aber alle ε_j gesetzt sind, ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein A_i aufgetreten ist, entweder 0 oder 1, also 0. Daher ist $\bigwedge_{i=1}^{m} \overline{A_i}$ erfüllt. **q. e. d.**

Bemerkung:
Algorithmus III läuft nicht unbedingt polynomiell, da die Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeiten für beliebige $a_{ij} \in [-1, +1]$ zu komplex ist. Jedoch läuft er polynomiell bei unserem Ausgangsproblem mit $a_{ij} \in \{-1, +1\}$, weil sich hier die bedingten Wahrscheinlichkeiten einfach durch entsprechende Binomialkoeffizienten ausdrücken und daher schneller berechnen lassen.

2 Das Pusher-Chooser-Game

Betrachten wir nun ein Nullsummen-Spiel für zwei Spieler. Gespielt wird über n Runden. Es geht darum, einen Punkt $P \in \mathbb{R}^n$, der zu Beginn auf 0 gesetzt ist, durch den Raum zu bewegen.

Dazu wählt der erste Spieler, genannt *Pusher*, einen beliebigen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $||v|| \leq 1$ aus. Der zweite Spieler, genannt *Chooser*, darf nun bestimmen, ob P auf $P + v$ oder $P - v$ gesetzt wird. Sei P^{final} das P nach der n-ten Runde. Chooser bezahlt $||P^{\text{final}}||$ Einheiten. Sei $\text{val}(n)$ der Wert des Spieles für Pusher.

Lemma 4:
Das Pusher-Chooser-Game mit $||\cdot|| := ||\cdot||_2$ (euklidische Norm) ist öde; der Wert des Spieles beträgt $\text{val}(n) = \sqrt{n}$.

Beweis:
Pusher kann immer einen Vektor v orthogonal zu P bestimmen, so daß Chooser keine Wahl hat. Nach Pythagoras gilt: $||P^{\text{neu}}||_2^2 = ||P^{\text{alt}}||_2^2 + ||v||_2^2$ und daher $\text{val}(n) = ||P^{\text{final}}||_2 = \sqrt{n}$. **q. e. d.**

Wir betrachten im folgenden das Pusher-Chooser-Game mit $||\cdot|| := ||\cdot||_\infty$.

Eine Strategie für Chooser

Satz 5:

$$\text{val}(n) \leq \sqrt{2n \ln(2n)}.$$

Beweis:
Sei $\alpha > 0$ fest, aber zunächst beliebig. Sei $G(x) := \cosh(\alpha x)$. Dann ist für jedes $a \in [-1, +1]$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot (G(x+a) + G(x-a)) &= G(x) \cdot G(a) \qquad (3) \\ &\leq G(x) \cdot \cosh(\alpha) \underset{(1)}{\leq} G(x) \cdot \exp\left(\frac{\alpha^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, sei $G(x) := \sum_{i=1}^{n} G(x_i)$.
Für alle $P \in \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $||v||_\infty \leq 1$ ergibt (3) über die Koordinaten summiert

$$\frac{1}{2} \cdot (G(P+v) + G(P-v)) \leq G(P) \cdot \exp\left(\frac{\alpha^2}{2}\right).$$

Wählt Chooser nun immer das Vorzeichen, bei dem der neue $G(P)$-Wert minimiert wird, und bezeichnet P^{alt} bzw. P^{neu} den Wert von P vor bzw. nach einem einzelnen Zug von Chooser, so ist

$$\begin{aligned} G(P^{\text{neu}}) &= \min\{G(P^{\text{alt}}+v), G(P^{\text{alt}}-v)\} \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot (G(P^{\text{alt}}+v) + G(P^{\text{alt}}-v)) \\ &\leq G(P^{\text{alt}}) \cdot \exp\left(\frac{\alpha^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Da am Anfang des Spieles $G(P) = G(0) = n$ ist, gilt $G(P^{\text{final}}) < n \cdot \exp\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)$.

Da $G(x) \geq \cosh(\alpha ||x||_\infty) > \frac{1}{2} \cdot \exp(\alpha ||x||_\infty)$ für alle x, ist daher $\frac{1}{2} \cdot \exp(\alpha ||P^{\text{final}}||_\infty) \leq n \cdot \exp\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)$.

Wählt man nun $\alpha := \sqrt{\frac{2\,\ln(2n)}{n}}$, ergibt sich

$$\text{val}(n) \leq ||P^{\text{final}}||_\infty < \sqrt{2n\,\ln(2n)}.$$

q. e. d.

Bemerkung:
Die Berechnung von $G(P)$ kann schnell erledigt werden. Deshalb erhält man hiermit auch einen besseren Algorithmus zum Bestimmen der $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ aus Kapitel 1. Jede Zahl $\text{val}(n)$ gibt dabei eine Schranke für $||\sum_j \varepsilon_j u_j||_\infty$ an, die mit einem (nicht mehr notwendigerweise schnellen) Algorithmus erreichbar ist.

Eine Strategie für Pusher

Satz 6:

$$\text{val}(n) > \sqrt{n \ln n} \cdot (1 - o(1)).$$

Zum Beweis von Satz 6 benötigen wir noch einige Vorbereitungen.

Da Pusher auf Maximalität bedacht ist, wähle er o. B. d. A. nur Vektoren v mit ganzzahligen Komponenten. Dadurch gilt immer $P \in \mathbb{Z}^n$.

Sortiere die Komponenten von P. Koordinaten mit gleichen Einträgen bilden eine *Gruppe*. Setze nun in jeder Gruppe die Hälfte der Komponenten von v auf 1, die andere Hälfte auf -1. Ist die Anzahl der Elemente der Gruppe ungerade, setze eine Komponente von v aus dieser Gruppe 0.

Beispiel:

Wenn $P =$	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	3	4	4
setze $v :=$	$+$	$+$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	0	0	$+$	$-$

Wenn Pusher nach dieser Strategie vorgeht, hat Chooser keine Wahlmöglichkeit mehr. Bis auf Permutation der Koordinaten ergibt sich

$P \pm v =$	-1	-1	1	1	0	2	2	0	0	3	1	2	3	5	3

Startet man mit $P = 0$ und berechnet mit diesem Vorgehen P^{final}, so ergibt $||P^{\text{final}}||_\infty$ eine untere Schranke für $\text{val}(n)$. Aber wie groß ist $||P^{\text{final}}||_\infty$?

Wir interessieren uns jetzt nur noch für die *Verteilung* der Koordinatenwerte von P und führen dazu folgende Schreibweise ein:
Zu $P = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ definiere $\hat{P} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$, wobei $\hat{P}(x)$ die Anzahl der i angibt mit $x_i = x$. Dabei wird $\hat{P}(0)$ unterstrichen.

Im obigen Beispiel wäre vor dem Zug $\hat{P} = \underline{5}\,4\,3\,1\,2$, danach $\hat{P} = 2\,\underline{3}\,3\,3\,3\,0\,1$. Die Transformation von $\hat{P}$ während eines Zuges sei T.

Wir können uns $\hat{P}$ als ein eindimensionales Feld vorstellen, bei dem $\hat{P}(x)$ Chips auf Feld x liegen.
Die Strategie von Pusher (und damit die Transformation T) kann dann wie folgt beschrieben werden: Lege von jedem Feld die Hälfte der Chips nach links, die andere Hälfte nach rechts; bei ungerader Anzahl Chips lasse einen Chip auf dem Feld liegen.

Definiere $\mathrm{supp}(\hat{P}) := \max\{i \mid \text{es liegen Chips auf } i \text{ oder } -i\}$, den *Support* von $\hat{P}$. Ferner bezeichne $\overline{n}$ genau die Situation, in der n Chips auf der 0 liegen. Dann gilt offenbar:

$$\mathrm{val}(n) \geq \mathrm{supp}(T^n(\overline{n})).$$

Beispiel: Sei $n = 20$; dann sind die Werte von $T^i(\overline{20})$

i=0	$\underline{20}$
i=1	10 $\underline{0}$ 10
i=2	5 0 $\underline{10}$ 0 5
i=3	2 0 7 $\underline{1}$ 7 0 2
$\vdots$	$\vdots$
i=20	1 1 1 1 1 3 1 $\underline{2}$ 1 3 1 1 1 1 1

und somit $\mathrm{val}(20) \geq 7$.

Sei $a := \mathrm{supp}(T^n(\overline{n}))$. Wir versuchen nun, a mittels einer Approximation von T durch einen linearen Operator S abzuschätzen. Wir betrachten dabei den Raum $\Omega := \{-a, \ldots, a\} \cup \{\infty\}$. ($\infty$ dient als Schranke.) Definiere dazu S auf Ω wie folgt:

$$\begin{aligned}
(Sx)(i) &:= \frac{1}{2} \cdot (x(i-1) + x(i+1)) \quad (|i| < a) \\
(Sx)(a) &:= \frac{1}{2} \cdot x(a-1) \\
(Sx)(-a) &:= \frac{1}{2} \cdot x(-a+1) \\
(Sx)(\infty) &:= x(\infty) + \frac{1}{2} \cdot x(a) + \frac{1}{2} \cdot x(-a).
\end{aligned}$$

S entspricht also im wesentlichen T, nur daß auch der ungerade Chip geteilt wird. S beschreibt einen zufälligen Spaziergang durch Ω.

Lemma 7:

$$(S^n - T^n)(\overline{n})(\infty) \leq 2a + 1.$$

Beweis:

$$(S^n - T^n)(\overline{n})(\infty) = \sum_{i=0}^{n-1} S^i(S-T)T^{n-1-i}(\overline{n})(\infty).$$

Hat $T^{n-1-i}(\overline{n})$ an Position j a_{ij} Chips $(-a \le j \le a)$, so bewirken S und T auf gerader Anzahl Chips genau dasselbe; bei ungerader Anzahl wird ein Chip von S geteilt, während ihn T liegenläßt. u_j bezeichne einen einzelnen Chip an Position j. Dann gilt

$$(S-T)T^{n-1-i}(\overline{n}) = \sum_{j \in A_i} Su_j - u_j,$$

wobei A_i die Menge der j sei mit ungeradem a_{ij}. Es folgt

$$\begin{aligned}(S^n - T^n)(\overline{n})(\infty) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j \in A_i} (S^{i+1} - S^i)(u_j)(\infty) \\ &\le \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{|j| \le a} (S^{i+1} - S^i)(u_j)(\infty),\end{aligned}$$

weil für alle i, j $(S^{i+1} - S^i)(u_j)(\infty) \ge 0$ gilt. (Deshalb wurde $\infty \in \Omega$ definiert.) Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}(S^n - T^n)(\overline{n})(\infty) &\le \sum_{|j| \le a} \sum_{i=0}^{n-1} (S^{i+1} - S^i)(u_j)(\infty) \\ &= \sum_{|j| \le a} (S^n - I)(u_j)(\infty) \\ &\le \sum_{|j| \le a} (1 - 0) \ = \ 2a + 1.\end{aligned}$$

q. e. d.

Beweis: (von Satz 6)
Betrachte die asymptotische Entwicklung von a:
Es war a so gewählt, daß $T^n(\overline{n})(\infty) = 0$, und nach Lemma 7 ist $S^n(\overline{n})(\infty) \leq 2a+1$, so daß (wegen Linearität)

$$S^n(\overline{1})(\infty) \leq \frac{2a+1}{n} \tag{4}$$

gilt. Aber $S^n(\overline{1})(\infty)$ ist die Wahrscheinlichkeit, auf dem zufälligen Spaziergang durch Ω, angefangen bei 0, $\pm(a+1)$ zum Zeitpunkt n zu erreichen. Ist jetzt $a := K \cdot \sqrt{n}$ mit langsam gegen ∞ laufendem K, so ist diese Wahrscheinlichkeit $\exp\left(\frac{-K^2}{2\cdot(1+o(1))}\right)$.

Für jedes feste $\varepsilon > 0$ gilt (4) bei Wahl von $a := \sqrt{n \ln n} \cdot (1-\varepsilon)$ nicht.
Somit ist

$$\mathrm{val}(n) > \sqrt{n \ln n} \cdot (1 - o(1)).$$

q. e. d.