Über Theorien von angeordneten abelschen Gruppen

Thomas Friedrich
10. Dezember 1997

Seminar über Formale Logik
Universität zu Köln

Definition: (Verknüpfung)
Ist $G \neq \emptyset$ eine Menge und $+ : G^2 \longrightarrow G$ eine Abbildung, so heißt $+$ eine *Verknüpfung* auf G. Für $(x, y) \in G^2$ schreibe $x + y$ statt $+(x, y)$.

Definition: (Gruppe, abelsche Gruppe)
Ist $G \neq \emptyset$ eine Menge mit einer Verknüpfung $+$, so heißt G eine *Gruppe*, wenn in G die folgenden *Gruppenaxiome* gelten:

$$
\begin{array}{llrcll}
\text{(G1)} & \forall\, x, y, z & (x+y)+z & = & x+(y+z) & \text{(Assoziativität)} \\
\text{(G2)} & \forall\, x & x+0 & = & x & \text{(rechtsneutr. Element)} \\
\text{(G3)} & \forall\, x\ \exists\, y & x+y & = & 0 & \text{(Existenz eines Inversen)}
\end{array}
$$

Das Inverse y zu x gemäß (G3) wird auch mit $-x$ bezeichnet.
Erfüllt G zusätzlich noch

$$
\begin{array}{llrcll}
\text{(G4)} & \forall\, x, y & x+y & = & y+x & \text{(Kommutativität),}
\end{array}
$$

so heißt G *abelsche* Gruppe.

Definition: (partielle Ordnung, lineare Ordnung)
Gelten in einer Gruppe G die Axiome

$$
\begin{array}{lll}
\text{(O1)} & \forall\, x & \neg\ x < x \qquad \text{(Nicht-Reflexivität)} \\
\text{(O2)} & \forall\, x, y, z & (x < y\ \wedge\ y < z\ \rightarrow\ x < z)\ \text{(Transitivität),}
\end{array}
$$

ist auf G also eine *partielle Ordnung* $<$ definiert, so heißt G eine *(partiell) angeordnete* Gruppe. Gilt in G zusätzlich

$$
\text{(O3)} \quad \forall\, x, y \quad (x < y\ \vee\ x = y\ \vee\ y < x) \quad \text{(Vergleichbarkeit)}
$$

ist G sogar *linear angeordnet* oder auch *totalgeordnet.*

Definition: (diskrete Ordnung, dichte Ordnung)
Ist G eine angeordnete abelsche Gruppe, und besitzt G ein kleinstes positives Element, gilt in G also

$$
\text{(DO)}\ \exists\, x\ (0 < x\ \wedge\ \forall\, y\ (0 < y\ \rightarrow\ x = y\ \vee\ x < y)),
$$

so heißt G *diskret angeordnet.* Ein Beispiel hierfür ist $\mathbb{Z}$ mit der üblichen Ordnung: hier ist die 1 das kleinste positive Element. Besitzt G kein kleinstes positives Element, so heißt G *dicht geordnet*; es gilt also

$$
\text{(O4)} \quad \forall\, x, y \quad (x < y\ \rightarrow\ \exists\, z\ (x < z\ \wedge\ z < y)),
$$

denn aus $a < b$ und $0 < c < (b - a)$ folgt natürlich $a < c + a < b$.

G heißt *torsionsfrei*, falls für alle $n \geq 1$ in G

$$(\mathrm{G5})_n \, \forall x \qquad (nx = 0 \;\rightarrow\; x = 0) \qquad\qquad \text{(Torsionsfreiheit)}$$

gilt, wobei nx die n-fache Summe $x + x + \ldots + x$ bezeichnet.

Definition: (Divisibilität)
Eine Gruppe G heißt *divisibel*, falls in G für alle $n \geq 1$ das Axiom

$$(\mathrm{G6})_n \, \forall x \; \exists y \quad ny = x \qquad\qquad \text{(Divisibilität)}$$

erfüllt ist. Eine divisible Gruppe kann nicht diskret geordnet sein, da das kleinste positive Element dann nicht mehr teilbar wäre.

Bemerkung:
Die *divisible Hülle* $\tilde{G}$ einer angeordneten Gruppe G, also eine minimale divisible Gruppe, die G enthält, kann man wie folgt (analog zur Konstruktion von $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$) erhalten:

Wir betrachten dabei Paare (a, n) mit $a \in |G|$ und $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. In $\mathbb{Q}$ ist dies vergleichbar mit Quotienten $\frac{a}{n}$; analog dazu sind zwei Paare (a, n) und (a', n') zueinander äquivalent, falls $n'a = na'$ ist.

Definieren wir nun noch die Addition durch

$$(a, n) + (a', n') = (n'a + na', nn')$$

und die Anordnung durch

$$(a, n) < (a', n') \quad \text{gdw.} \quad n'a < na',$$

so sieht man ein, daß die Äquivalenzklassen solcher Paare eine divisible angeordnete abelsche Gruppe $\tilde{G}$ bilden (man denke hierbei wieder an $\mathbb{Q}$).

G selbst läßt sich mittels $a \mapsto (a, 1)$ in $\tilde{G}$ einbetten.

Nun ist $\tilde{G}$ eine divisible Erweiterung von G, und es gilt: zu jedem $b \in |\tilde{G}|$ gibt es $a \in |G|$ und $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ mit $nb = a$.
Mit dieser Eigenschaft ist $\tilde{G}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Im folgenden betrachten wir die Theorie der angeordneten abelschen Gruppen mit den Axiomen

$$
\begin{array}{lll}
\text{(G1)} & \forall x,y,z & (x+y)+z \doteq x+(y+z) \\
\text{(G2)} & \forall x & x+0 \doteq x \\
\text{(G3)} & \forall x\,\exists y & x+y \doteq 0 \\
\text{(G4)} & \forall x,y & x+y \doteq y+x \\
 & & \\
\text{(O1)} & \forall x & \neg\; x<x \\
\text{(O2)} & \forall x,y,z & (x<y \;\wedge\; y<z \;\rightarrow\; x<z) \\
\text{(O3)} & \forall x,y & (x<y \;\vee\; x\doteq y \;\vee\; y<x) \\
\text{(OG)} & \forall x,y,z & (x<y \;\rightarrow\; x+z<y+z) \\
\text{(O5)'} & \exists x & x \neq 0
\end{array}
$$

und die Theorie der divisiblen angeordneten abelschen Gruppen, in denen zusätzlich für $n \geq 1$

$$
\text{(G6)}_n \; \forall x\,\exists y \quad ny \doteq x
$$

gilt, wobei $\forall x,y,z$ Abkürzung für $\forall x\,\forall y\,\forall z$, nx Abkürzung für die n-fache Summe $x+x+\ \ldots\ +x$ und $\doteq$ als Identität interpretiert ist.

Definition: (Modellvollständigkeit, Modellbegleiter)
Eine Menge $\Sigma \subset \mathrm{Aus}(L)$ heißt *modellvollständig*, falls für jedes Modell $\mathcal{A}$ von Σ die $L(\mathcal{A})$-Aussagenmenge $\Sigma \cup D(\mathcal{A})$ vollständig ist, wobei $D(\mathcal{A})$ das Diagramm von $\mathcal{A}$ ist.
Ein Axiomensystem $\Sigma^* \subset \mathrm{Aus}(L)$ heißt *Modellbegleiter* von Σ, falls gilt:

(i) jedes Modell von Σ^* ist auch Modell von Σ,

(ii) jedes Modell von Σ läßt sich zu einem Modell von Σ^* erweitern,

(iii) Σ^* ist modellvollständig.

Satz 4.1:
Die Theorie der divisiblen angeordneten abelschen Gruppen erlaubt Quantorenelimination und ist vollständig und modellvollständig.

Beweis:
Quantorenelimination:
Seien G_1 und G_2 divisible angeordnete abelsche Gruppen mit gemeinsamer Substruktur H. Da es keine Inversenbildung in unserer Sprache gibt, ist H lediglich Semigruppe; es gelten aber die Kürzungsregeln $x+z \doteq y+z \;\rightarrow\; x \doteq y$

und $x + z < y + z \quad \rightarrow \quad x < y$. In G_1 und G_2 sind die Inversen eindeutig bestimmt. Deshalb sind die in G_1 und G_2 durch H erzeugten angeordneten Untergruppen zueinander isomorph. Das gilt auch noch für ihre divisiblen Hüllen - wir können diese deshalb mit $\tilde{H}$ identifizieren. ($\tilde{H}$ kann auch die triviale Gruppe sein.)

Für eine einfache Existenzaussage $\exists\, x\ \delta$ der Sprache $L(H)$ nehmen wir jetzt $G_1 \models \exists\, x\ \delta$ an und zeigen $G_2 \models \exists\, x\ \delta$. Dann können wir mit Satz 3.20 (1)$\Leftrightarrow$(3) auf die Quantorenelimination schließen.

O. B. d. A. liegt δ in disjunktiver Normalform vor, d. h.

$$\delta = (\delta_1 \vee \ \dots \ \vee \delta_m),$$

wobei die δ_ν Konjunktionen von Primformeln und negierten Primformeln der Sprache $L(H)$ sind mit einziger freier Variablen x.
Wir können noch einige Vereinfachungen in δ vornehmen: wir ersetzen für Terme t_1, t_2 die Formeln

$$\begin{array}{lcl} \neg(t_1 \doteq t_2) & \text{durch} & (t_1 < t_2 \vee t_2 < t_1) \\ \neg(t_1 < t_2) & \text{durch} & (t_2 < t_1 \vee t_1 \doteq t_2) \end{array}$$

und haben damit alle Negationen entfernt. Für geordnete Gruppen ist das nach Axiom (O3) eine äquivalente Ersetzung.
Das Ergebnis bringen wir wieder in disjunktive Normalform.

Da $\exists\, x\ (\delta_1 \vee \dots \vee \delta_m)$ logisch äquivalent ist zu $\exists\, x\ \delta_1 \vee \dots \vee \exists\, x\ \delta_m$, genügt es, nur ein einziges $\exists\, x\ \delta_\nu$ zu betrachten.
δ_ν ist nach Umordnung von der Gestalt

$$\bigwedge_{i=1}^{r} n_i x + \underline{a_i} \doteq n_i' x + \underline{a_i'} \ \wedge \ \bigwedge_{j=1}^{s} m_j x + \underline{b_j} < m_j' x + \underline{b_j'},$$

wobei wir evtl. neue Konstanten eingeführt und Ausdrücke der Form $\underline{a} + \underline{b}$ durch $\underline{a + b}$ ersetzt haben. Der Fall $r = 0$ oder $s = 0$ ist erlaubt. Alle Konstanten $\underline{a}$ gehören zu Elementen $a \in |H|$.

δ_ν ist in G_1 erfüllt. Ist nun für eine Gleichung $n_i \neq n_i'$, so ist das x, das δ_ν in G_1 erfüllt, eindeutig bestimmt und liegt schon in $\tilde{H}$, da δ_ν Formel über $L(H)$ ist.
Damit haben wir $\tilde{H} \models \exists\, x\ \delta_\nu$ und somit auch $G_2 \models \exists\, x\ \delta_\nu$.

Sind alle Gleichungen trivial, d. h. $n_i = n_i'$ für $1 \leq i \leq r$, oder ist $r = 0$, dann erfüllt jedes Element aus G_1 und somit auch jedes aus $\tilde{H}$ alle Gleichungen (es gilt dann für alle $1 \leq i \leq r: \; a_i = a_i'$); ein Element d aus G_1 erfüllt die Formel δ_ν also genau dann, wenn es den Ungleichungsteil ebenfalls erfüllt. Dies heißt aber genau

$$(m_j - m_j')\, d < b_j' - b_j \qquad \text{für alle } 1 \leq j \leq s.$$

Gibt es ein solches Element in G_1, dann auch in $\tilde{H}$, wenn $\tilde{H}$ nicht die triviale Gruppe ist. Es gilt also wieder $\tilde{H} \models \exists\, x\ \delta_\nu$ und somit $G_2 \models \exists\, x\ \delta_\nu$.

Ist nun $\tilde{H}$ die triviale Gruppe, so sind alle $b_j = b_j' = 0$; jetzt behauptet $\exists\, x\ \delta_\nu$ lediglich die Existenz eines positiven bzw. negativen Elements. Wegen (O5)' gilt dies natürlich auch in G_2.

Modellvollständigkeit:
Die Modellvollständigkeit folgt unmittelbar aus der Quantorenelimination.

Vollständigkeit:
Da die triviale Gruppe $(|G|; <; +; 0) := (\{0\}; \emptyset; +; 0)$ mit 0+0=0 eine Primsubstruktur ist (jede Gruppe enthält ein isomorphes Bild der trivialen Gruppe), folgt die Vollständigkeit mit Korollar 3.21.
Beachte: $(\{0\}; \emptyset; +; 0)$ ist kein Prim*modell*, da $\exists\, x\ x \neq 0$ nicht erfüllt ist.

q. e. d.

Korollar 4.2:
Die Theorie der divisiblen angeordneten abelschen Gruppen ist der Modellbegleiter der Theorie der angeordneten abelschen Gruppen.

Beweis:
Modellbegleiter:

(i) Jede divisible angeordnete abelsche Gruppe ist insbesondere angeordnete abelsche Gruppe.

(ii) Jede angeordnete abelsche Gruppe ist wie oben beschrieben in ihre divisible Hülle einbettbar.

(iii) Die Theorie der divisiblen angeordneten abelschen Gruppen ist modellvollständig nach Satz 4.1.

q. e. d.

Für die weiteren Betrachtungen empfiehlt es sich, für das kleinste positive Element in diskret angeordneten Gruppen eine Konstante zur Sprache hinzuzunehmen: die 1.

Definition: ($\mathbb{Z}$-Gruppe)
Eine diskret angeordnete abelsche Gruppe, die zusätzlich für alle $n \geq 1$

$$(\mathrm{D})_n \quad \forall\, x\, \exists\, y \left(\bigvee_{\nu=1}^{n} x + \nu 1 = ny \right)$$

erfüllt, heißt eine *$\mathbb{Z}$-Gruppe*. Später werden wir sehen, daß $\mathbb{Z}$ Primmodell dieser Klasse von Gruppen ist.

Wir betrachten also im folgenden die Theorie der $\mathbb{Z}$-Gruppen, die sich (in der Sprache mit $\underline{1}$) wie folgt axiomatisieren läßt:

$$\begin{array}{lll}
(\mathrm{G1}) & \forall\, x, y, z & (x+y)+z \doteq x+(y+z) \\
(\mathrm{G2}) & \forall\, x & x+0 \doteq x \\
(\mathrm{G3}) & \forall\, x\, \exists\, y & x+y \doteq 0 \\
(\mathrm{G4}) & \forall\, x, y & x+y \doteq y+x \\
 & & \\
(\mathrm{O1}) & \forall\, x & \neg\ x < x \\
(\mathrm{O2}) & \forall\, x, y, z & (x < y \ \wedge\ y < z \ \rightarrow\ x < z) \\
(\mathrm{O3}) & \forall\, x, y & (x < y \ \vee\ x \doteq y \ \vee\ y < x) \\
(\mathrm{OG}) & \forall\, x, y, z & (x < y \ \rightarrow\ x + z < y + z) \\
(\mathrm{DO}) & \exists\, x & (0 < x \ \wedge\ \forall\, y\, (0 < y \ \rightarrow\ x \doteq y \ \vee\ x < y))
\end{array}$$

sowie für alle $n \geq 1$

$$(\mathrm{D})_n \quad \forall\, x\, \exists\, y \left(\bigvee_{\nu=1}^{n} x + \nu \underline{1} \doteq ny \right)$$

Satz 4.3:
Die Theorie der $\mathbb{Z}$-Gruppen ist modellvollständig und vollständig.

Beweis:
Modellvollständigkeit:
Die Modellvollständigkeit werden wir über den Umweg der Quantorenelimination in einer passenden Spracherweiterung zeigen.

Sei L die Sprache, in der die Theorie der $\mathbb{Z}$-Gruppen axiomatisiert ist.
Diese Sprache erweitern wir durch Hinzunahme von einstelligen Relationen R_n für $n \geq 2$ (o. B. d. A. sind die R_n wirklich neue Relationen).

Das Axiomensystem Σ für $\mathbb{Z}$-Gruppen erweitern wir um die Axiome

$$(\mathrm{A})_n \quad \forall x \qquad (R_n(x) \;\leftrightarrow\; \exists y\; x \doteq ny)$$

zu Σ'. Die Relation R_n drückt also die Teilbarkeit durch n aus. Damit lassen sich die Axiome $(\mathrm{D})_n$ umformulieren in

$$(\mathrm{D})_n' \quad \forall x \bigvee_{\nu=1}^{n} R(x + \nu\underline{1}).$$

Die Restriktionen von Modellen von Σ' auf L sind gerade die $\mathbb{Z}$-Gruppen.

Die Substrukturbeziehung zwischen Modellen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von Σ ändert sich nicht, wenn wir diese durch die Interpretationen der neuen Relationen R_n gemäß den Axiomen $(\mathrm{A})_n$ zu Σ'-Modellen $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{B}'$ erweitern: gilt nämlich für $a \in |\mathcal{A}|$ in $\mathcal{B}$

$$a \equiv \nu \bmod n,$$

ist also $a - \nu 1$ in $\mathcal{B}$ durch n teilbar, so gilt dies auch in $\mathcal{A}$, da a auch hier zu einem ν' modulo n kongruent ist; dies muß zwangsläufig das ν sein.

Weiterhin sei zu L' noch eine einstellige Funktion hinzugenommen, die wir als die Inversenbildung interpretieren. Σ' enthalte deswegen noch das (Körper-) Axiom

$$(\mathrm{K3}) \quad \forall x \qquad x + (-x) \doteq 0.$$

Auch dadurch ändert sich die Substrukturbeziehung zwischen Modellen nicht.

Die Quantorenelimination beweisen wir nun direkt per Induktion über den Formelaufbau; d. h. wir benutzen nicht Satz 3.20. Dabei soll α modulo Σ' äquivalent zu β heißen, wenn $\Sigma' \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$.
Induktionsanfang: klar; jede Primformel ist quantorenfrei.
Induktionsschluß: Die Fälle $\varphi = \neg\,\delta_1$ und $\varphi = \delta_1 \wedge \delta_2$ sind uninteressant, da mit δ_1 und δ_2 natürlich auch φ quantorenfrei ist.
Sei also nun $\varphi = \exists x\; \delta$. Wir können ein unnegiertes Vorkommen der Relationen $R_n(t)$ in δ annehmen; wegen $(\mathrm{D})_n'$ können wir nämlich $\neg R_n(t)$ modulo Σ' äquivalent durch

$$R_n(t + \underline{1}) \vee \ldots \vee R_n(t + (n-1)\underline{1})$$

ersetzen. Ferner ersetzen wir Negationen von $t_1 \doteq t_2$ und $t_1 < t_2$ wie im Beweis zu Satz 4.1.

Bringen wir δ dann in disjunktive Normalform und verteilen den Existenzquantor (logisch äquivalent) auf die einzelnen Disjunktionsglieder, so brauchen wir uns wieder nur um ein einziges δ_ν kümmern (vgl. Beweis von Satz 4.1), das nach Umordnung von der Gestalt

$$\bigwedge_{i=1}^{r} m_i x \doteq t_i \ \wedge \ \bigwedge_{i=1}^{r'} m'_i x < t'_i \ \wedge \ \bigwedge_{i=1}^{r''} m''_i x \equiv t''_i \bmod n_i$$

ist, wobei $m_i, m'_i, m''_i \in \mathbb{Z}$ sind und

$$m''_i x \equiv t''_i \bmod n_i \qquad \text{für} \qquad R_{n_i}(m''_i x + (-t''_i))$$

steht. Die Fälle $r = 0$, $r' = 0$ oder $r'' = 0$ sind erlaubt.

Durch Multiplikation mit passenden ganzen Zahlen $\neq 0$ können wir erreichen, daß alle Koeffizienten m_i, m'_i und m''_i gleich einer einzigen Zahl m sind; im Falle einer Kongruenz muß der Modul n_i mitmultipliziert werden.
Durch Multiplikation mit negativen Zahlen drehen sich evtl. Ungleichungen um. Wir können also davon ausgehen, daß δ_ν die Form

$$\bigwedge_{i=1}^{r} mx \doteq t_i \ \wedge \ \bigwedge_{i=1}^{r^+} mx < t_i^+ \ \wedge \ \bigwedge_{i=1}^{r^-} mx > t_i^- \ \wedge \ \bigwedge_{i=1}^{r''} mx \equiv t''_i \bmod n_i$$

hat. Ersetzen von mx durch y und Hinzufügen der Bedingung $y \equiv 0 \bmod m$ ist wiederum eine modulo Σ' äquivalente Umformung. So können wir schließlich annehmen, δ_ν habe die Gestalt (schreibe wieder x für y):

$$\bigwedge_{i=1}^{r} x \doteq t_i \ \wedge \ \bigwedge_{i=1}^{r^+} x < t_i^+ \ \wedge \ \bigwedge_{i=1}^{r^-} x > t_i^- \ \wedge \ \bigwedge_{i=1}^{r''} x \equiv t''_i \bmod n_i$$

Nun gibt es die folgenden vier Fälle:

1.) $r > 0$.
Es kommt also mindestens eine Gleichung $x = t_1$ vor. Dann ist $\exists x\ \delta_\nu$ aber zu

$$\bigwedge_{i=2}^{r} t_1 \doteq t_i \ \wedge \ \bigwedge_{i=1}^{r^+} t_1 < t_i^+ \ \wedge \ \bigwedge_{i=1}^{r^-} t_1 > t_i^- \ \wedge \ \bigwedge_{i=1}^{r''} t_1 \equiv t''_i \bmod n_i$$

modulo Σ' äquivalent, und somit der Quantor eliminiert.

2.) $r = 0$, aber $r^+ \geq 1$.
D. h. es kommt mindestens eine Ungleichung $x < t_1^+$ vor. Nun ist mit x aber auch $x + ln$ für alle $l \in \mathbb{Z}$ eine Lösung des Systems

$$x \equiv t_i'' \bmod n_i \quad (1 \leq i \leq r''),$$

falls n das kleinste gemeinsame Vielfache der $n_1, \ldots, n_{r''}$ ist. Mit

$$t^+ := \min\{t_i^+ \,|\, 1 \leq i \leq r^+\}$$

können wir x dann aus der Menge

$$\{t^+ - 1,\, t^+ - 2, \ldots, t^+ - n\}$$

wählen. Damit läßt sich $\exists\, x\ \delta_\nu$ modulo Σ' äquivalent schreiben als

$$\bigvee_{k=1}^{r^+} \bigvee_{j=1}^{n} \left(\bigwedge_{i=1}^{r^+} t_k^+ \leq t_i^+ \ \wedge\ \bigwedge_{i=1}^{r^-} t_i^- < t_k^+ - j \ \wedge\ \bigwedge_{i=1}^{r''} t_k^+ - j \equiv t_i'' \bmod n_i \right).$$

3.) $r = 0$, $r^+ = 0$, aber $r^- \geq 1$.
Analog zu 2.) mit $t^- := \max\{t_i^- \,|\, 1 \leq i \leq r^-\}$ und Betrachtung von x aus der Menge $\{t^- + 1,\, t^- + 2, \ldots, t^- + n\}$ läßt sich $\exists\, x\ \delta_\nu$ modulo Σ' äquivalent schreiben als

$$\bigvee_{k=1}^{r^-} \bigvee_{j=1}^{n} \left(\bigwedge_{i=1}^{r^-} t_i^- \leq t_k^- \ \wedge\ \bigwedge_{i=1}^{r''} t_k^- + j \equiv t_i'' \bmod n_i \right).$$

4.) $r = 0$, $r^+ = 0$, $r^- = 0$, aber $r'' \geq 1$.
Mit n wie in 2.) als kleinstes gemeinsames Vielfaches der $n_1, \ldots, n_{r''}$ ist $\exists\, x\ \delta_\nu$ modulo Σ' äquivalent zum quantorenfreien Ausdruck

$$\bigvee_{j=1}^{n} \left(\bigwedge_{i=1}^{r''} j \equiv t_i'' \bmod n_i \right).$$

Damit erlaubt Σ' Quantorenelimination und ist deshalb modellvollständig. Da sich die Substrukturbeziehung bei der Erweiterung von Σ zu Σ' nicht geändert hat, ergibt sich daraus die Modellvollständigkeit von Σ.

Vollständigkeit:
Jedes Modell der $\mathbb{Z}$-Gruppen enthält $0, 1$ und $+$. Hierdurch wird aber bereits $\mathbb{Z}$ erzeugt; $\mathbb{Z}$ ist also ein Primmodell. Zusammen mit der eben gezeigten Modellvollständigkeit folgt mit Korollar 3.12 die Vollständigkeit.

q. e. d.

Korollar 4.4:
Die Theorie der $\mathbb{Z}$-Gruppen ist (in der Sprache mit $\underline{1}$) der Modellbegleiter der Theorie der diskret angeordneten abelschen Gruppen.

Beweis:
Modellbegleiter:
Unter Verwendung von Satz 4.3 bleibt zu zeigen, daß sich jede diskret angeordnete abelsche Gruppe G zu einer $\mathbb{Z}$-Gruppe erweitern läßt.

G ist diskret angeordnet, aber i. a. keine $\mathbb{Z}$-Gruppe (also zu klein). $\tilde{G}$ ist nicht mehr diskret angeordnet (also zu groß). Sei H eine maximale Erweiterung von G in $\tilde{G}$, so daß 1^G in H immer noch minimal positiv ist. Die Existenz von H sichert uns das Lemma von Zorn.

Zu zeigen ist: zu jedem $n \geq 2$ und jedem $a \in H$ gibt es ein $0 \leq r < n$ („Divisionsrest beim Teilen durch n"). Dann ist gezeigt, daß H eine $\mathbb{Z}$-Gruppe ist.

Sei dazu $a \in H$ beliebig, $n \geq 2$ und

$$n = \prod_{i=1}^{k} {p_i}^{\mu_i}$$

die (eindeutige) Zerlegung von n in Primfaktoren.

Sei $p \in \{p_1, \ldots, p_k\}$ Primzahl. Ist a nicht durch p teilbar, so kann die Erweiterung $H + \mathbb{Z}\frac{a}{p}$ von H nicht mehr 1^G als minimales positives Element haben. Also gibt es $b \in H$ und $m \in \mathbb{Z}$ mit m teilerfremd zu p und

$$0 < b + m\frac{a}{p} < 1.$$

(Im folgenden schreiben wir für $n1^G$ einfach n.) Hieraus folgt

$$0 < pb + ma < p.$$

Wegen der Teilerfremdheit von m und p gibt es nach EUKLID $s, t \in \mathbb{Z}$ mit

$$sp + tm = 1.$$

Sei zunächst $0 < t$. Dann erhalten wir insgesamt

$$0 < tpb + (1 - sp)a < pt$$

bzw. nach Umordnung

$$0 < p(tb - sa) + a < pt.$$

H ist diskret geordnet; deshalb gibt es $r \in \mathbb{Z}$ mit

$$p(tb - sa) + a = r.$$

Dies folgt jedoch auch für $t < 0$. Also ist

$$a - r = pa_1$$

für ein $a_1 \in H$. Für dieses a_1 und einen weiteren Primfaktor $q \in \{p_1, \ldots, p_k\}$ von n läßt sich dieser Prozeß wiederholen, etwa

$$a_1 - r_1 = qa_2$$

für ein $a_2 \in H$ und $r_1 \in \mathbb{Z}$, usw. Insgesamt gibt es also ein $r \in \mathbb{Z}$ mit

$$a - r \in nH;$$

o. B. d. A. kann man dabei $0 \leq r < n$ wählen. Dies war zu zeigen.

q. e. d.

Bemerkung:
Die Theorie der $\mathbb{Z}$-Gruppen läßt sich auch ohne die Hinzunahme der neuen Konstanten $\underline{1}$ axiomatisieren; dabei muß lediglich die $\underline{1}$ implizit beschrieben werden. Die Axiome der $\mathbb{Z}$-Gruppen in der Sprache der angeordneten Gruppen - also ohne die $\underline{1}$- sind dann die oben genannten Axiome für diskret angeordnete abelsche Gruppen zusammen mit

$$(\mathrm{D}^-)_n \quad \forall u\ (0 < u \wedge \forall y\ (0 < y \ \rightarrow\ u \doteq y \vee u < y) \ \rightarrow\ (\mathrm{D})_n[1/u]),$$

wobei u die $\underline{1}$ beschreibt und $[1/u]$ besagt, daß in $(\mathrm{D})_n$ das Symbol $\underline{1}$ durch u ersetzt werden soll.
In jedem Modell dieses Axiomensystems Σ gibt es ein kleinstes positives Element: die Interpretation der $\underline{1}$ in der erweiterten Sprache.

$\mathbb{Z}$ und $2\mathbb{Z}$ sind beides Modelle von Σ, wobei $2\mathbb{Z}$ Substruktur von $\mathbb{Z}$ ist. Erweitern wir die Sprache nun um die $\underline{1}$, gilt dies nicht mehr: in $2\mathbb{Z}$ muß das kleinste positive Element $\underline{1}$ mit der 2 interpretiert werden, um eine $\mathbb{Z}$-Gruppe zu erhalten.
Dies ist ein Beispiel dafür, daß sich bei Spracherweiterung die Substrukturbeziehung ändern kann.

Aus Satz 4.3 folgt auch die Vollständigkeit der Theorie ohne $\underline{1}$. Damit haben wir auch ein Beispiel einer vollständigen Theorie, die nicht modellvollständig ist, da zwar $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$, nicht aber $2\mathbb{Z} \prec \mathbb{Z}$ gilt.

Zitate der verwendeten Sätze und Korollare:

Korollar 3.12:
Die Menge $\Sigma \subset \mathrm{Aus}(L)$ sei modellvollständig und besitze ein Primmodell. Dann ist Σ vollständig.

Satz 3.20:
Für $\Sigma \subset \mathrm{Aus}(L)$ sind äquivalent:

(1) Σ erlaubt Quantorenelimination,

(2) $\Sigma \cup D(\mathcal{A})$ ist vollständig für jede Substruktur $\mathcal{A}$ eines Modells von Σ,

(3) für je zwei Modelle $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ von Σ mit einer endlich erzeugten Substruktur $\mathcal{A}$ und jede einfache Existenzaussage φ der Sprache $L(\mathcal{A})$ gilt: $(\mathcal{B}_1, |\mathcal{A}|) \overset{\varphi}{\rightsquigarrow} (\mathcal{B}_2, |\mathcal{A}|)$.

Korollar 3.21:
Erlaubt $\Sigma \subset \mathrm{Aus}(L)$ Quantorenelimination und besitzt Σ eine Primsubstruktur, so ist Σ vollständig.

erstellt mit LaTeX 2ε.